

Progressão geométrica

Teoria

Seja a sequência numérica dada por:

$$(2, 6, 18, 54, 162, \dots)$$

Essa sequência não é uma progressão aritmética, pois a diferença entre dois termos consecutivos não é uma constante. Contudo, podemos destacar outro padrão para essa sequência numérica, já que cada termo é o triplo do termo anterior.

Em outras palavras, podemos notar que a razão entre um termo qualquer dessa sequência e seu antecedente é sempre igual a 3 (a partir do segundo).

$$\frac{6}{2} = 3; \quad \frac{18}{6} = 3; \quad \frac{54}{18} = 3; \quad \frac{162}{54} = 3; \dots$$

Definição:

Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência numérica de números reais na qual a razão entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante). Essa constante é a chamada razão da P.G. e é indicada por **q**.

Classificações de uma P.G.:

De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Geométricas da seguinte forma:

- Progressão geométrica crescente: **$a_1 > 0$ e $q > 1$** .
Exemplo: $(5, 10, 20, 40, 80, \dots) \rightarrow a_1 = 5$ e $q = 2$.
 - Progressão geométrica decrescente: **$a_1 > 0$ e $0 < q < 1$** .
Exemplo: $(243, 81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots) \rightarrow a_1 = 243$ e $q = \frac{1}{3}$.
 - Progressão geométrica alternada: **$a_1 \neq 0$ e $q < 0$** .
Exemplo: $(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots) \rightarrow a_1 = 1$ e $q = -2$.
 - Progressão geométrica constante: **$q = 1$** .
Exemplo: $(7, 7, 7, 7, 7, 7, \dots) \rightarrow q = 1$.
-

Termo geral da P.G.:

Sejam:

a_n um termo genérico da P.G.;

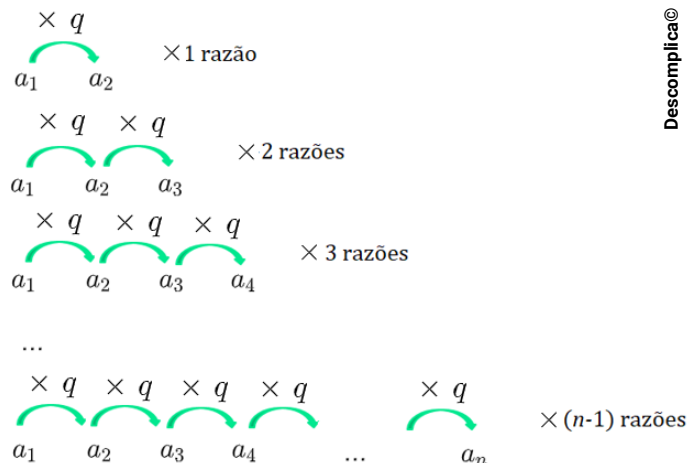
a_1 o 1º termo da P.G.;

n a posição do termo;

q a razão da P.G.

Observe a imagem abaixo. Ela mostra que, para ir de a_1 para a_2 , devemos multiplicar a_1 pela razão. Para ir de a_1 para a_3 , multiplicamos por duas razões. Para ir de a_1 para a_4 , multiplicamos por três razões, e assim sucessivamente. Em linhas gerais, o número de razões pelas quais devemos multiplicar o termo a_1 para que cheguemos a um termo a_n qualquer é sempre uma unidade menor do que a posição desse termo.

Por exemplo, para encontrar o vigésimo termo de uma sequência a partir do a_1 , deveríamos pensar que $a_{20} = a_1 \cdot \underbrace{(q \cdot q \cdot \dots \cdot q)}_{19 \text{ razões}} = a_1 \cdot q^{19}$.



Por isso, a expressão que nos permite obter um termo qualquer da P.G. é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplo: dada a P.G. $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots)$, calcule o seu décimo primeiro termo.

Primeiro calculamos: $q = \frac{a_2}{a_1} \rightarrow q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} \rightarrow q = \frac{8}{4} = 2$.

Logo, o décimo primeiro termo será:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1} \rightarrow a_{11} = \frac{1}{8} \cdot 2^{10} \rightarrow a_{11} = \frac{1}{8} \cdot 1024 \rightarrow a_{11} = 128.$$

A expressão anterior do termo geral de uma progressão geométrica se baseia no primeiro termo da sequência. Contudo, podemos determinar uma expressão para o termo geral a partir de qualquer termo da P.G.. Isto é, como, para irmos de um termo a_k ao termo a_n , precisamos multiplicar a_k por $(n - k)$ razões, temos:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}; \quad n > k$$

Obs.: perceba que essa fórmula para o termo geral é muito parecida com a anterior, só trocamos 1 por k , visto que estamos achando a_n a partir do k – ésimo termo da sequência, e não mais do primeiro.

Propriedades de uma P.G.:

- **1ª propriedade: trio de termos consecutivos da P.G.**

Dados três termos consecutivos de uma P.G., o termo médio é igual à média geométrica dos outros dois. Assim, se os termos consecutivos são dados por (a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) , então

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Exemplo: se em uma P.G. temos que $(\dots, 12, x, 192, \dots)$, podemos determinar x por

$$x = \sqrt{12 \cdot 192} = \sqrt{2.304} \rightarrow x = 48$$

As duas próximas propriedades são generalizações dessa primeira.

- **2ª propriedade: termo central.**

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ uma progressão geométrica em que o número de termos n é ímpar. Assim, existe um termo central para essa sequência representado por a_c . Em uma progressão geométrica com n termos, sendo n igual a um número ímpar, o termo central é indicado por a_c e é calculado da seguinte forma:

$$a_c = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$

Exemplo: na P.G. $(3, ?, ?, x, ?, ?, 192)$, podemos determinar x , que é central em relação aos extremos, a partir de:

$$x = \sqrt{3 \cdot 192} = \sqrt{576} \rightarrow x = 24$$

Soma dos n primeiros termos (S_n) de uma P.G.:

Dada uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ cuja razão q é diferente de 1, a soma de seus n primeiros termos é representada por S_n , isto é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

- No caso em que $q = 1$, a soma dos termos da P.G. é igual a $S_n = n \cdot a$.
- Para os casos em que $q \neq 1$, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Soma dos infinitos termos (s_∞) de uma P.G. decrescente

Para alguns tipos de progressões geométricas, podemos calcular o valor do limite da soma de seus infinitos termos. Essas sequências são chamadas de progressões geométricas convergentes e se caracterizam por ter a razão entre -1 e 1 , ou seja, $-1 < q < 1$. Para calcularmos a soma de seus infinitos termos, usamos a fórmula abaixo:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Produto dos n primeiros termos (P_n) de uma P.G.

Dada uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, de razão q , o produto de seus n primeiros termos é representado por P_n , isto é:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exercícios de fixação

1. Assinale qual das sequências abaixo não representa uma P.G.:
(A) $(2; -2; 2; -2; \dots)$.
(B) $(1; 6; 36; 216; \dots)$.
(C) $(9; 3; 1; \frac{1}{3}; \dots)$.
(D) $(14; 14; 14; 14; \dots)$.
(E) $(6; 12; 18; 24; \dots)$.

 2. Determine o décimo termo da sequência $(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots)$.

 3. Em uma P.G., o terceiro termo é igual a 54 e o sétimo termo é igual a $\frac{2}{3}$. Determine o primeiro termo dessa sequência.

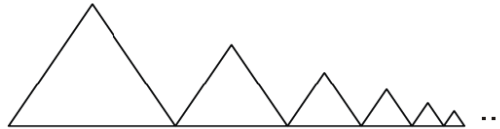
 4. Vamos empilhar 5 caixas em ordem crescente de altura. A primeira caixa tem 1 m de altura, cada caixa seguinte tem o triplo da altura da anterior. A altura da nossa pilha de caixas será:
(A) 121 m.
(B) 81 m.
(C) 32 m.
(D) 21 m.
(E) 15 m.

 5. Calcule o valor da soma $16 + 8 + 4 + 2 + \dots$.
-

Exercícios de vestibulares



1. (UFRGS) A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.



A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é

- (A) 9.
- (B) 12.
- (C) 15.
- (D) 18.
- (E) 21.



2. (Enem) Alguns modelos de rádios automotivos estão protegidos por um código de segurança. Para ativar o sistema de áudio, deve-se digitar o código secreto composto por quatro algarismos. No primeiro caso de erro na digitação, a pessoa deve esperar 60 segundos para digitar o código novamente. O tempo de espera duplica, em relação ao tempo de espera anterior, a cada digitação errada. Uma pessoa conseguiu ativar o rádio somente na quarta tentativa, sendo de 30 segundos o tempo gasto para digitação do código secreto a cada tentativa. Nos casos da digitação incorreta, ela iniciou a nova tentativa imediatamente após a liberação do sistema de espera. O tempo total, em segundo, gasto por essa pessoa para ativar o rádio foi igual a
- (A) 300.
 - (B) 420.
 - (C) 540.
 - (D) 660.
 - (E) 1 020.
-

3. (Enem) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final. Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas. Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por
- (A) $2 \cdot 128$.
 - (B) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$.
 - (C) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.
 - (D) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$.
 - (E) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.
4. Um menino propôs a seu pai que lhe desse R\$1,00 no dia 1º de dezembro e fosse, a cada dia, dobrando o valor da quantia diária, até o dia 24 de dezembro. No dia 25 de dezembro, ele daria ao pai, com o dinheiro acumulado, um presente de natal. O pai aceitou a proposta, desde que o filho lhe desse um presente que custasse o dobro da quantia que o filho recebesse no dia 24. Se o acordo entre os dois for firmado, o menino dará ao pai um presente com, exatamente, o seguinte valor:
- (A) metade do que receber.
 - (B) o dobro do que receber.
 - (C) toda a quantia recebida.
 - (D) toda a quantia recebida mais R\$1,00.
 - (E) um terço do que receber.
5. (IFPE) Dudu quer se tornar um youtuber famoso, mas, em seu primeiro vídeo, ele obteve apenas 5 inscritos em seu canal. Obstinado que é, Dudu pretende, a cada novo vídeo, duplique o número de novos inscritos no seu canal. Se no primeiro mês ele postar 10 vídeos e conseguir atingir a meta estabelecida, ao fim deste mês, seu canal terá
- (A) 1024 inscritos.
 - (B) 5120 inscritos.
 - (C) 5115 inscritos.
 - (D) 1023 inscritos.
 - (E) 310 inscritos.
-

6. (Enem) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t , para $t \geq 1$?
- (A) $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8000$.
 (B) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8000$.
 (C) $P(t) = 4.000 \cdot t^{-1} + 8000$.
 (D) $P(t) = 8000 \cdot (0,5)^{t-1}$.
 (E) $P(t) = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$.
7. (Enem) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

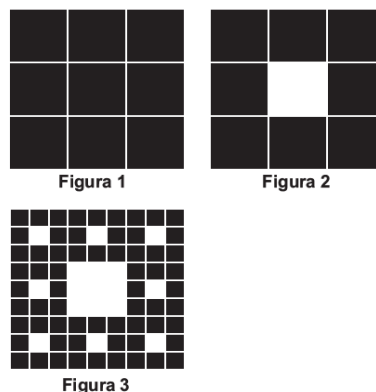


Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida de lado, em centímetro, é:

- (A) 14.
 (B) 12.
 (C) $7\sqrt{2}$.
 (D) $6 + 4\sqrt{2}$.
 (E) $6 + 2\sqrt{2}$.

8. (Enem) Uma maneira muito útil de se criar belas figuras decorativas utilizando a matemática é pelo processo de autossimilaridade, uma forma de se criar fractais. Informalmente, dizemos que uma figura é autossimilar se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo. Um exemplo clássico é o Carpete de Sierpinski, criado por um processo recursivo, descrito a seguir:

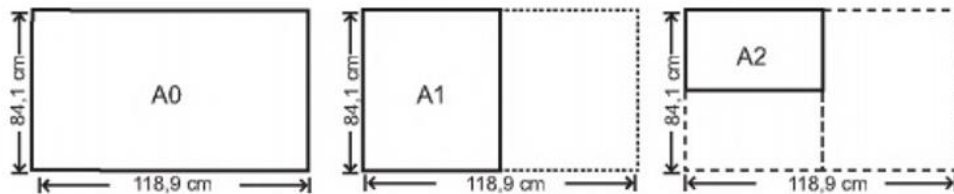
- Passo 1: Considere um quadrado dividido em nove quadrados idênticos (Figura 1). Inicia-se o processo removendo o quadrado central, restando 8 quadrados pretos (Figura 2).
- Passo 2: Repete-se o processo com cada um dos quadrados restantes, ou seja, divide-se cada um deles em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um, restando apenas os quadrados pretos (Figura 3).
- Passo 3: Repete-se o passo 2.



Admita que esse processo seja executado 3 vezes, ou seja, divide-se cada um dos quadrados pretos da Figura 3 em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um deles. O número de quadrados pretos restantes nesse momento é:

- (A) 64.
 - (B) 512.
 - (C) 568.
 - (D) 576.
 - (E) 648.
9. Na progressão geométrica $(1, 2, 4, 8, \dots)$ sendo a_n o n -ésimo termo e S_n a soma dos n primeiros termos, podemos concluir que:
- (A) $S_n = 2 \cdot a_n$.
 - (B) $S_n = a_n + 1$.
 - (C) $S_n = a_{n+1} + 1$.
 - (D) $S_n = a_{n+1} - 1$.
 - (E) $S_n = 2 \cdot a_n + 1$.

10. (Enem) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são $84,1 \text{ cm} \times 118,9 \text{ cm}$. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.



Disponível em <http://pt.wikipedia.org>. Acessado em 04/04/2012 (adaptado)

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

- (A) 8.
- (B) 16.
- (C) 64.
- (D) 128.
- (E) 256.

Se liga!

Sua específica é Exatas e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique [aqui](#) para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. **E**

A sequência da letra **E** é uma P.A. de razão 6, não configurando uma P.G.

2. **32**

Nessa P.G. de razão $\frac{1}{3}$, podemos utilizar o termo geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_{10} = \frac{1}{16} \cdot 2^9 = \frac{512}{16} = 32$.

3. **486**

Como $a_3 = 54$ e $a_7 = \frac{2}{3}$, vale dizer que, pelo termo geral, $a_7 = a_3 \cdot q^4 \rightarrow \frac{2}{3} = 54 \cdot q^4 \rightarrow \frac{2}{54} = q^4 \rightarrow \frac{1}{81} = q^4$. Como $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = q^4$, essa é uma P.G. de razão $\frac{1}{3}$. Assim, $a_1 = a_3 \cdot 3^2 = 54 \cdot 9 = 486$.

4. **A**

Temos a seguinte sequência: (1,3,9,27,81)

Calculando a soma dessa P.G.:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \rightarrow S_5 = \frac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} \rightarrow S_5 = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121 \text{ m.}$$

Ou então, como é um número pequeno de termos, pode-se calcular da seguinte forma:

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 \text{ m.}$$

5. **32**

Aplicando a relação da soma infinita:

$$16 + 8 + 4 + 2 + \dots = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32.$$

Exercícios de vestibulares

1. **A**

A soma pedida é igual a

$$3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 9.$$

2. **C**

O tempo gasto com as digitações foi igual a $30 \cdot 4 = 120$ segundos. Além disso, como ele errou as três primeiras tentativas, teve que esperar $60 + 120 + 240 = 420$ segundos. Somando os tempos $420 + 120 = 540$ segundos de espera total.

3. **E**

O número de partidas disputadas decresce segundo uma progressão geométrica de primeiro termo $\frac{128}{2} = 64$ e razão $\frac{1}{2}$. Portanto, a resposta é $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

4. D

O problema relata uma P.G. de 24 termos, de razão 2, 1º termo igual a 1 e $a_n = 24^\circ$ termo. Observe que no 24º dia o filho receberia 8 338 608 reais:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{23} = 8.388.608$$

Caso o acordo fosse firmado, o presente deveria ter o dobro desse valor, que seria:

$$2 \cdot 8\,388\,608 = 16\,777\,216.$$

Para saber o quanto essa quantia representa do valor recebido durante os 24 dias, precisa-se fazer a soma dos 24 termos dessa P.G.:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(16777216 - 1)}{2 - 1} = 16777215$$

Valor recebido durante o período: R\$ 16 777 215

Valor do presente: R\$ 16 777 216

Então, o valor do presente deveria ter o valor de toda quantia recebida pelo filho mais R\$1,00.

5. C

O número de inscritos no canal de Dudu cresce em Progressão Geométrica de razão 2. Para solucionar a questão, devemos considerar a soma dos 10 primeiros termos das P.G. abaixo:

$$(5, 10, 20, 40, 80, \dots) \rightarrow S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{5(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 5.115 \text{ inscritos.}$$

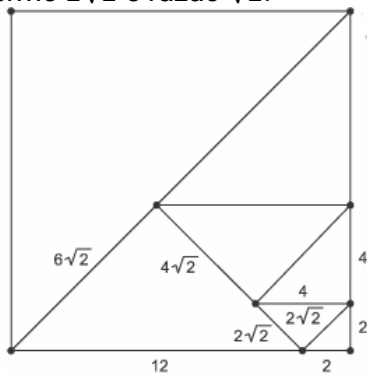
6. E

O número de unidades produzidas cresce segundo uma progressão geométrica de razão $q = 1 + 0,5 = 1,5$ e primeiro termo igual a 8.000. Portanto, a equação que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$, é

$$P(t) = 8.000 \cdot (1,5)^{t-1}$$

7. A

Observe que as hipotenusas dos triângulos retângulos crescem segundo uma P.G. de primeiro termo $2\sqrt{2}$ e razão $\sqrt{2}$.



Portanto, de acordo com a figura, a resposta é $12 + 12 = 14 \text{ cm}$.

8. B

É possível ver que o número de quadrados pretos que restam após a n -ésima iteração é dado por $8n$. Portanto, após a terceira iteração, o número de quadrados pretos que restam é igual a $8^3 = 512$.

9. D

Desde que $a_{n+1} = 1 \cdot 2^n = 2^n$, temos $S_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 = a_{n+1} - 1$.

10. E

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8 \rightarrow q = 2$$

$$\text{Pelo termo geral, } a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot 2^7 = 256.$$